TEORIA DE CONJUNTOS I

I. NOCIONES PREVIAS

1. Conjunto: Concepto no definido del cual se tiene una idea subjetiva y se le asocian ciertos sinónimos tales como colección, agrupación o reunión de objetos abstractos o concretos de una misma especie. Ejemplos:

   - Los meses del año
   - Las regiones del país

2. Notación: Los conjuntos se denotan a través de una letra mayúscula, mientras que los elementos se separan mediante comas o punto y comas. Ejemplos:

   - R = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}
   - Q = {Juan, Pedro, Mario}

3. Cardinal de un conjunto n( ): Indica la cantidad de elementos diferentes de un conjunto. Ejemplos:

   - T= {2; 2; 3; 3; 6; 6; 8; 8} _____ n(T) = 4
   - S= {Rojo, Verde, Azul} ______ n(S) = 3
   - V= {M, A, N, O, L, O} _______ n(V) = 5

Pertenencia (∈) Es la relación que se establece entre un elemento y un conjunto. Sean los conjuntos:

A = {1; 2; 3; 4; 5} y B = {5; 6; 7}, determinando la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

- 1 ∈ A (V), ya que 1 es elemento del conjunto A
- 3 ∈ B (F), 3 no es un elemento del conjunto B
- {2} ∈ A (F), el elemento del conjunto A es 2, no {2}
- 5; 6 ∈ B (F), la relación se da de UN elemento a UN conjunto

II. RELACIONES EN LOS CONJUNTOS

1. Inclusión (⊂) Es la relación que se establece entre un conjunto y otro conjunto. Se dice que un conjunto está incluido en otro, si todos los elementos del 1° están en el 2°. Sean los conjuntos: A = {1; 2; 3; 4; 5}; B = {3; 4; 5} y C = {1; 2; 3}; determinando la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

- B ⊂ A (V), ya que todos los elementos de B están en A
- C ⊂ B (F), no todos los elementos de C están en B
- {2} ⊂ A (V), ya que {2} es un subconjunto de A
- Φ ⊂ B (V), ya que Φ es subconjunto de todo conjunto

Se considera que el conjunto vacío está incluido en todos los conjuntos, así como cada conjunto está incluido en sí mismo.

III. TIPOS DE CONJUNTOS

A. Conjunto Unitario (Singleton): Es aquel que posee un solo elemento.
   A = {Saturno}
   C= {Satélite natural de la tierra}
   B = {1; 1; 1; 1; 1; 1}
   D = {22; 16; 4}

B. Conjuntos iguales: son aquellos que poseen los mismos elementos.
   F = {1; 2; 3; 4} y T = {4; 3; 2; 1}, son conjuntos iguales. Si los elementos de los conjuntos mostrados son enteros positivos, G= {a^3; 2b} y H = {10; 27} y además estos conjuntos son iguales, se deduce que a = 3 y b = 5.

C. Conjunto potencia. P( ): es el conjunto formado por todos los subconjuntos que posee un conjunto.
Siendo D= {1; 2; 3}, entonces:

$$P(D) = \{\underbrace{\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{2; 3\}; \{1; 3\}; \{1; 2; 3\}; \{\ \}}\}$$

Subconjuntos del conjunto D o elementos del Conjunto potencia de D

De forma práctica se puede determinar:

Número de subconjuntos de un conjunto o Número de elementos del conjunto potencia $= 2^n$

Donde "n" representa el cardinal del conjunto indicado.

Si piden el número de subconjuntos PROPIOS entonces se aplicará la fórmula $2^n - 1$

IV. DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

1. Por Extensión: es cuando los elementos se encuentran denotados en el conjunto.
   R = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}
   B = {a, e, i, o, u}

2. Por Comprensión: es cuando los elementos se encuentran representados a través de una forma general y además condicionados por una o más propiedades generalmente matemáticas.
   $R = \{x / x \in N, 0 < x \leq 7\}$
   B = {x/ x es una vocal}

Advertencia pre

- De las dos maneras de determinar un conjunto, la más recurrente es la determinación por comprensión, llamada también forma constructiva.

EJERCICIOS

1. Indica los cardinales de cada conjunto mostrado:

B = {1; 2; 3} ( )
C = {1; 1; 1} ( )
$D = \{1^2; 2^1; 3^0\}$ ( )
E = {Carmen} ( )

2. Determina la cantidad de subconjuntos de cada conjunto mostrado:

B = {1; 2; 3; 4; 5} ( )
C = {1; {1}; 2; {2}} ( )
D = {x/x es un número natural menor de 7} ( )
E = {L; O; L; O} ( )

3. Teniendo los siguientes conjuntos, se pide determinar el valor de verdad de cada proposición, A = {1; 2; 4; 5}; B = {2; 3; 4; 6} y C = {3; 4; 5; 6}

$5 \in A$ ( )	$1 \notin A$ ( )	$1;2 \notin C$ ( )
$6 \in B$ ( )	$\{4\} \notin B$ ( )	$\{2\} \notin A$ ( )
$\{4\} \in C$ ( )	$3 \in C$ ( )	$5;6 \in C$ ( )

4. Teniendo los siguientes conjuntos, se pide determinar el valor de verdad de cada proposición, A = {1; 2; 4; 5}; B = {1; 4; 5}; C = {4; 5} y D = {1; 2; 3; 4; 5}

$B \subset A$ ( )	$D \not\subset A$ ( )	$A \subset C$ ( )
$C \not\subset B$ ( )	$A \not\subset B$ ( )	$C \not\subset A$ ( )
$D \subset C$ ( )	$C \subset C$ ( )	$C \subset D$ ( )

5. Determina la cantidad de subconjuntos del siguiente conjunto:

$$L = \{x^2 / x \in \mathbb{Z}, -3 < x \leq 3\}$$

a) 128 b) 64 c) 32
d) 16 e) 8

6. Dados los conjuntos unitarios:

A = {90; a.b} y B = {a+b; 23}

Calcula la diferencia entre a y b.

a) 13 b) 14 c) 12
d) 16 e) 18

7. Si el siguiente conjunto es SINGLETÓN, determina el valor de (b – a + c), sabiendo que a, b y c son enteros positivos:

B = {a+b; 23; a^2 +7; $c^3 - 4$}

a) 13 b) 14 c) 12
d) 16 e) 18

8. Los conjuntos mostrados a continuación son iguales. Dar el valor de ($a^2 - 3b$):

A = {a + b; 17} y B = {a – b; 23}

a) 341 b) 351 c) 391
d) 361 e) 371

9. Determina el valor de verdad de cada una de las proposiciones mostradas a partir del conjunto indicado:

W= {x+2/ x ∈ ℤ, - 4< x -1 ≤ 2}

- 4 ∈ W ( )
- -2 ∈ W ( )
- {2} ∉ W ( )
- { } ∉A ( )

a) VFVF b) VVVF c) VVFF
d) VFFF e) VFVV

10. Indica la suma de los elementos del conjunto mostrado:

K= {x-1 / x ∈ ℕ, x -2 ≤ 6}

a) 27 b) 35 c) 28
d) 30 e) 29

EJERCICIOS (TEORÍA DE CONJUNTOS I)

① Indica los cardinales de cada conjunto mostrado:

$B=\{1;2;3\}$ ------ $n(B)=3$

$C=\{1;1;1\}$ ------ $n(C)=1$

$D=\{1^2;2^1;3^0\}=\{1;2;1\} \rightarrow n(D)=2$

$E=\{$Carmen$\}$ ------ $n(E)=1$

② Determinar la cantidad de subconjuntos de cada conjunto mostrado.

$B=\{1;2;3;4;5\}$ --- $\rightarrow 2^n=2^5=\underline{32}$

$C=\{1;\{1\};2;\{2\}\}$ --- $\rightarrow 2^n=2^4=\underline{16}$

$D=\{x/x$ es un número natural menor de $7\}=\{0;1;2;3;4;5;6\} \rightarrow 2^7=\boxed{128}$

$E=\{L;0;L;0\}$ --- $\rightarrow 2^2=\underline{4}$

(3) Teniendo los siguientes conjuntos, se pide determinar el valor de verdad de cada proposición,

$A=\{1;2;4;5\}$; $B=\{2;3;4;6\}$ y $C=\{3;4;5;6\}$

$5 \in A$ (V) $\quad 1 \notin A$ (F) $\quad 1;2 \notin C$ (V)

$6 \in B$ (V) $\quad \{4\} \notin B$ (V) $\quad \{2\} \notin A$ (V)

$\{4\} \in C$ (F) $\quad 3 \in C$ (V) $\quad 5;6 \in C$ (F)

(4) Teniendo los siguientes conjuntos, se pide determinar el valor de verdad de cada proposición,

$A=\{1;2;4;5\}$; $B=\{1;4;5\}$; $C=\{4;5\}$ y $D=\{1;2;3;4;5\}$

$B \subset A$ (V) $\quad D \not\subset A$ (V) $\quad A \subset C$ (F)

$C \not\subset B$ (F) $\quad A \not\subset B$ (V) $\quad C \not\subset A$ (F)

$D \subset C$ (F) $\quad C \subset C$ (V) $\quad C \subset D$ (V)

(5) Determinar la cantidad de subconjuntos del siguiente conjunto:

$$L=\{x^2 / x \in \mathbb{Z}, -3 < x \leq 3\}$$

$$\hookrightarrow L=\{(-2)^2;(-1)^2;(0)^2;(1)^2;(2)^2;(3)^2\}$$

$$L=\{4;1;0;1;4;9\} \rightarrow n(L)=4$$

$\Rightarrow$ Cantidad de subconjuntos: $2^n = 2^4 = 16$

(6) Dados los Conjuntos unitarios:
$A=\{90; a\cdot b\}$ y $B=\{a+b; 23\}$
Calcula la diferencia entre a y b

$\Rightarrow$ A es unitario $\Rightarrow a\cdot b=90$ (I)
B es unitario $\Rightarrow a+b=23$ (II) $\rightarrow b=23-a$

$\rightarrow$ Reemplazo (II) en (I) $\rightarrow a(23-a)=90$

$23a-a^2=90$

$0=a^2-23a+90$

$0=(a-18)(a-5)$

$a=18$, $b=5$; $a=5$, $b=18$

$\rightarrow a-b=18-5=13$

(7) Si el siguiente conjunto es SINGLETÓN, determinar el valor de $(b-a+c)$, sabiendo que a, b y c son enteros positivos.

$B=\{a+b; 23; a^2+7; c^3-4\}$

B es Singletón (es unitario)

$\rightarrow a^2+7=23 \rightarrow a^2=23-7 \rightarrow a^2=16 \rightarrow a=4$

$\rightarrow a+b=23 \rightarrow 4+b=23 \rightarrow b=23-4 \rightarrow b=19$

$\rightarrow c^3-4=23 \rightarrow c^3=23+4 \rightarrow c^3=27 \rightarrow c=3$

$\Rightarrow (b-a+c)=(19-4+3)=18$

(8) Los conjuntos mostrados a continuación son iguales. Dar el valor de (a^2-3b)

$A=\{a+b;17\}$ y $B=\{a-b;23\}$

$A=B \rightarrow \begin{cases} a+b=23 & (I) \\ a-b=17 & (II) \end{cases}$

$2a+0=40$

$a=40/2$

$a=20 \rightarrow 20+b=23 \rightarrow b=23-20$

$b=3$

$\rightarrow (a^2-3b)=(20^2-3\cdot3)=(400-9)=391$

(9) Determinar el valor de verdad de cada una de las proposiciones mostradas a partir del conjunto indicado:

$W=\{x+2/x\in Z, -4<x-1\leq 2\}$

$\rightarrow W=\{x+2/x\in Z, -3<x\leq 3\}$

$W=\{-2+2;-1+2;0+2;1+2;2+2;3+2\}$

$W=\{0;1;2;3;4;5\}$

- $4\in W$ (V)
- $-2\in W$ (F)
- $\{2\}\notin W$ (V)
- $\{\ \}\notin A$ (V)

$\rightarrow$ VFVV

(10) Indica la suma de los elementos del conjunto mostrado:

$K = \{x-1 / x \in \mathbb{N},\ x-2 \leq 6\}$

$\hookrightarrow K = \{x-1 / x \in \mathbb{N},\ x \leq 8\}$

$K = \{0-1; 1-1; 2-1; 3-1; 4-1; 5-1; 6-1; 7-1; 8-1\}$

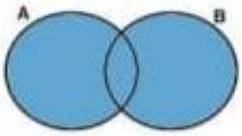
$\hookrightarrow K = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

$\hookrightarrow -1+0+1+2+3+4+5+6+7 = 27$

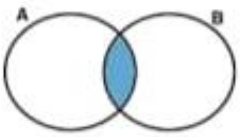
TEORIA DE CONJUNTOS II

I. OPERACIONES CON CONJUNTOS

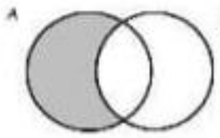
1. UNIÓN (∪): Es la agrupación de todos los elementos de los conjuntos participantes.



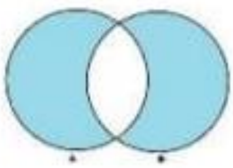
2. INTERSECCIÓN (∩): Es el conjunto formado por los elementos comunes de los conjuntos participantes.



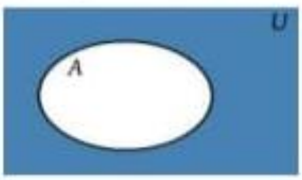
3. DIFERENCIA (–): Es el conjunto formado por los elementos que están en el primer conjunto, pero no en el segundo.



4. DIFERENCIA SIMÉTRICA (Δ): Es el conjunto formado por los elementos no comunes de los conjuntos dados.



5. COMPLEMENTO (´): Es el conjunto formado por los elementos que le faltan a un conjunto para ser igual al Universo (U).



Advertencia pre

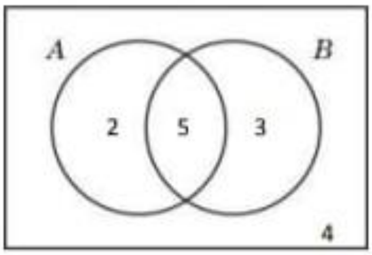
- Los conjuntos disjuntos son aquellos que no tienen ningún elemento en común y los comparables se reconocen pues uno de ellos está contenido en el otro.

Nota: Las operaciones que cumplen la propiedad conmutativa son:

$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$
$A \Delta B = B \Delta A$

II. DIAGRAMAS CON CONJUNTOS

Son las diferentes formas de representar a un conjunto. De estas la más conocida es el diagrama de Venn-Euler, la cual se usa cuando existen elementos que pueden pertenecer a más de un conjunto a la vez, generando así zonas o regiones comunes. Ejemplos:

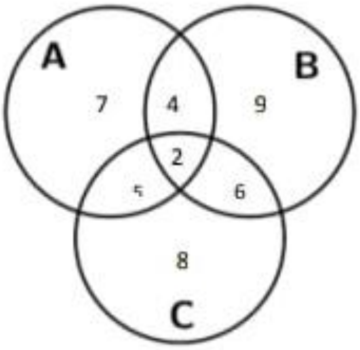


- Conjunto A = 2 + 5 = 7
- Conjunto B = 5 + 3 = 8
- Solo A = 2
- Solo B = 3
- A y B = 5
- A o B = 2 + 5 + 3 = 10
- No A = 3 + 4 = 7
- No B = 2 + 4 = 6

- Ni A ni B = 4
- No A, pero si B = 3
- No B, pero si A = 2

Advertencia pre

- Existen algunas zonas o regiones en los diagramas de Venn-Euler; que, a pesar de tener diferente denominación, representan la misma zona o región. Por ejemplo, en el diagrama adjunto:
- "No A, pero si B" representa la misma zona que: "B, pero no A.



- A= 4 + 7 + 2 + 5 = 18
- B = 4 + 9+ 2 + 6 = 21
- C = 5 + 2 + 6 + 8 = 21
- A y B = 4 + 2 = 6
- B y C = 6 + 2 = 8
- A y C= 5 + 2 = 7
- Solo A = 7
- Solo B = 9
- Solo C = 8
- No A = 9 + 6 + 8 = 23
- No B = 7 + 5 + 8 = 20
- No C = 4 + 7 + 9 = 20
- A, pero no B = 7 + 5 = 12
- B, pero no C = 4 + 9 = 13
- C, pero no A = 8 + 6 = 14
- A, pero no C = 4 + 7 = 11
- C, pero no B = 5 + 8 = 13
- B, pero no A = 9 + 6 = 15
- Solo A y B = 4
- Solo B y C = 6
- Solo C y A = 5
- A o B o C = 4 + 7 + 9 + 5 + 2 + 6 + 8 = 41
- A, B y C = 2

Nota: Un diagrama de Venn se puede representar por cualquier figura geométrica regular o irregular.

III. CASO ESPECIAL: DIAGRAMA DE CARROLL

Este diagrama se usa cuando los conjuntos dados no tienen elementos en común, es decir; son conjuntos disjuntos.

	Juegan	No juegan
Varones	12	5
Mujeres	6	7

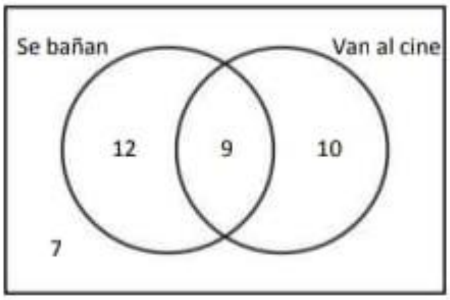
- Varones = 12 + 5 = 17
- Mujeres = 6 + 7 = 13
- Personas que juegan = 12 + 6 = 18
- Personas que no juegan = 5 + 7 = 12
- Varones que juegan = 12
- Mujeres que No juegan = 7
- Varones que no juegan = 5
- Mujeres que juegan = 6

Advertencia pre

- En algunos problemas de exámenes de admisión se ha observado el uso en la resolución de los dos tipos de diagramas vistos en este capítulo.

EJERCICIOS

1. Del siguiente esquema, determina la suma de:
   - La cantidad de personas que solo se bañan.
   - La cantidad de personas que no van al cine.
   - La cantidad de personas que se bañan y van al cine.



a) 10; 19 y 7 b) 12; 12 y 9 c) 10; 9 y 9
d) 12; 19 y 9 e) 12; 10 y 9

2. Del diagrama anterior, determina:

- ¿Cuántas personas se bañan?
- ¿Cuántas personas van al cine?
- ¿Cuántas personas no se bañan ni van al cine?

a) 12; 10 y 7 b) 21; 10 y 7
c) 12; 19 y 7 d) 21; 19 y 9
e) 21; 19 y 7

3. De los conjuntos dados, determinar A∪B:
A = {1; 2; 3; 4} y B = {2; 4; 6}

a) {1; 2; 3; 4; 5} b) {2; 3; 4} c) {1; 3; 4; 6}
d) {1; 2; 3} e) {1; 2; 3; 4; 6}

4. De los conjuntos anteriores determinar A ∩ B:

a) {1; 2; 3} b) {2; 3; 4} c) {3; 4}
d) {1; 3} e) {2; 4}

5. Sabiendo que:
A − B = {2; 3; 4} y B − A = {1; 5},
determinar la suma de los elementos de la operación A Δ B.

a) 15 b) 14 c) 21
d) 18 e) 17

6. ¿Cuál es el resultado de interceptar el conjunto de números naturales, con el conjunto de números enteros?

a) Z b) Q c) N d) R e) { }

7. Determinar el cardinal de la operación AΔB para los conjuntos mostrados:

$$A = \{x / x \in \mathbb{N},\ 2 < x \le 7\}$$

$$B = \{x^2 / x \in \mathbb{Z}, -1 \le x \le 3\}$$

a) 5 b) 4 c) 6 d) 7 e) 9

8. En un salón de 31 alumnos del colegio Nuevo Amanecer, se observó que 20 alumnos dominan Aritmética, 18 dominan Álgebra y 12 dominan ambos cursos. Determinar cuántos no dominan ninguno de los cursos mencionados.

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

9. Se sabe que de un total de 45 personas en una reunión 15 no fuman ni beben. Los que solo beben son 10 y los que fuman y beben son la cuarta parte de los que solo fuman. Determinar cuántas personas no beben.

a) 24 b) 31 c) 36 d) 27 e) 28

10. En un grupo de 27 personas entre varones y mujeres se sabe que: 7 varones estudian, 8 mujeres no estudian. Si los varones que no estudian son la mitad de las mujeres que estudian, determinar el total de varones de dicho grupo.

a) 14 b) 13 c) 16 d) 12 e) 11

EJERCICIOS. (TEORÍA DE CONJUNTOS II)

(1) Del siguiente esquema, determinar la suma de:

→ La cantidad de personas que solo se bañan ---- 12

→ La cantidad de personas que no van al cine ---- 12+7=19

→ La cantidad de personas que se bañan y van al cine -- 9

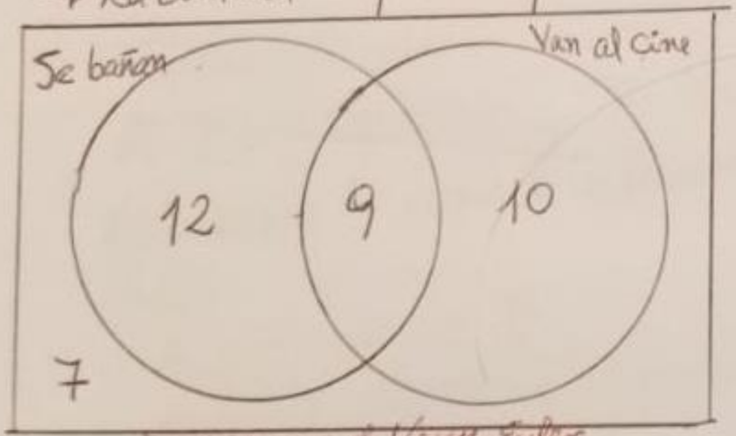


Diagrama de Venn-Euler.

Resp → (d) 12, 19 y 9

(2) Del diagrama anterior, determina:

→ ¿Cuantas personas se bañan? ---- 12+9=21

→ ¿Cuantas personas van al cine? ---- 9+10=19

→ ¿Cuantas personas no se bañan ni van al cine? -- → 7

Resp:- (e) 21, 19 y 7

(3) De los conjuntos dados, determinar $A \cup B$:

$A=\{1;2;3;4\}$ y $B=\{2;4;6\}$

↳ $A \cup B=\{1;2;3;4;6\}$

↳ Respuesta → (e)

(4) De los conjuntos anteriores, determinar $A \cap B$.

$A \cap B = \{2; 4\}$

↳ Respuesta → (e)

(5) Sabiendo que:

$A - B = \{2; 3; 4\}$ y $B - A = \{1; 5\}$

determinar la suma de los elementos de la Operación $A \Delta B$.

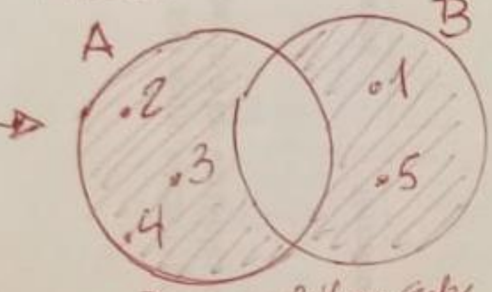


Diagrama de Venn-Euler

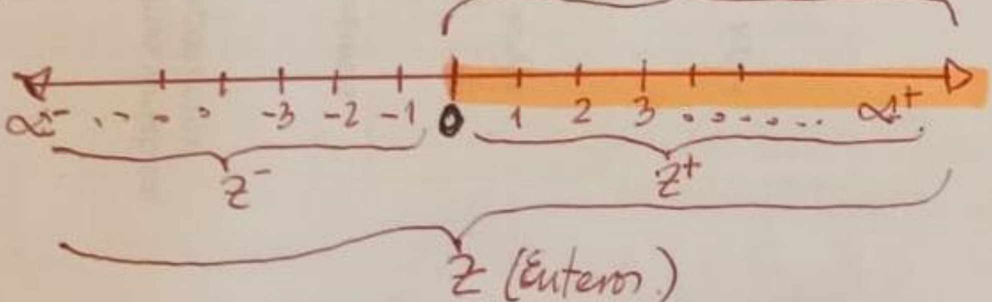
$A \Delta B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

↳ Suma $= 1+2+3+4+5 = 15$

↳ Respuesta → (a) 15

(6) Cuál es el resultado de interceptar el conjunto de números naturales, con el conjunto de números enteros?

N(Naturales) = {0; 1; 2; 3; ... ∞^+)



$\Rightarrow N \cap Z = N$

↳ Respuesta → (c) N

(7) Determinar el cardinal de la operación $A \triangle B$ para los conjuntos mostrados

$A = \{x / x \in \mathbb{N},\ 2 < x \leq 7\}$
$B = \{x^2 / x \in \mathbb{Z},\ -1 \leq x \leq 3\}$

$A = \{3; 4; 5; 6; 7\}$
$B = \{(-1)^2; (0)^2; (1)^2; (2)^2; (3)^2\} = \{1; 0; 1; 4; 9\}$

$A \triangle B = ?$

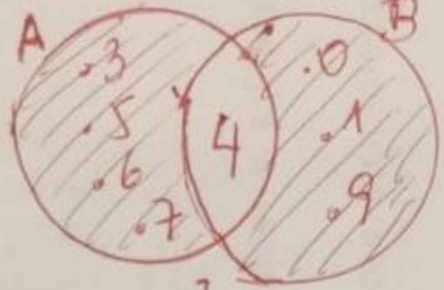


Diagrama de Venn-Euler

$A \triangle B = \{0; 1; 3; 5; 6; 7; 9\}$

$n(A \triangle B) = 7$ ⟶ Respuesta → (d) 7

(8) En un salón de 31 alumnos del Colegio Nuevo Amanecer, se observó que 20 alumnos dominan Aritmética, 18 dominan Álgebra y 12 dominan ambos cursos. Determinar cuántos no dominan ninguno de los cursos mencionados.

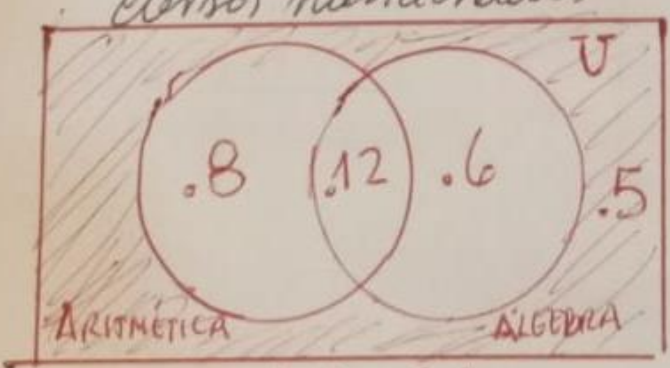


Diagrama de Venn-Euler

→ $U = 31$

→ No dominan ninguno de los cursos $= 31 - 8 - 12 - 6 = 5$

→ Respuesta → (b) 5

(9) Se sabe que de un total de 45 personas en una reunión 15 no fuman ni beben. Los que solo beben son 10 y los que fuman y beben son la cuarta parte de los que solo fuman. Determinar cuántas personas no beben.

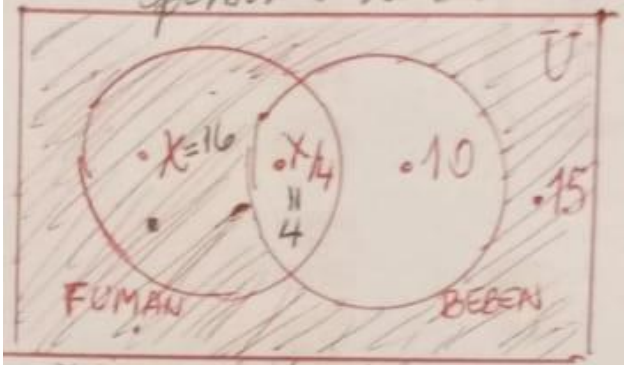


Diagrama de Venn-Euler

$U = 45$

$x + \frac{x}{4} + 10 + 15 = 45 \rightarrow \underline{x = 16}$

→ No beben $= 16 + 15 = 31$

→ Respuesta → (b) 31

(10) En un grupo de 27 personas entre varones y mujeres se sabe que: 7 varones estudian, 8 mujeres no estudian. Si los varones que no estudian son la mitad de las mujeres que estudian, determinar el total de varones de dicho grupo.

	Estudian	No estudian
Varones	7	$\frac{x}{2} = 4$
Mujeres	$x = 8$	8

→ Total = 27

¿Total Varones?

Diagrama de Carroll.

$\Rightarrow 7 + \frac{x}{2} + x + 8 = 27 \rightarrow x = 8 \rightarrow \frac{x}{2} = 4$

$\Rightarrow$ Total de varones $= 7 + 4 = 11$

→ Respuesta → (c) 11